

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL - MATEMÁTICA II

CICLO II – 2025

Unidad III: Área entre curvas.

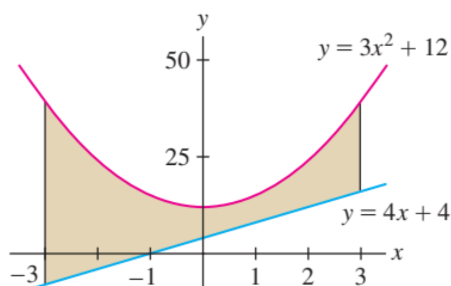
Área entre curvas.

Aprendizajes esperados: al finalizar con éxito esta unidad los estudiantes serán capaces de calcular el área entre dos curvas utilizando la integración definida a lo largo de los ejes x o y, interpretando correctamente la geometría de la región delimitada por las dos curvas.

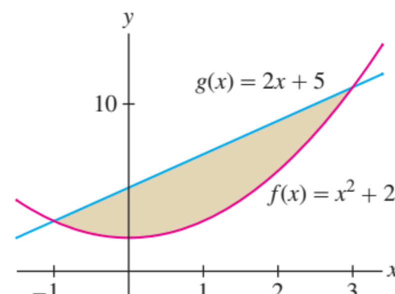
1. ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ si $f(x) \geq g(x)$?
2. ¿Representa $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ el área entre las gráficas de f y g si $f(x) \geq 0$ pero $g(x) \leq 0$?
3. Suponga que $f(x) \geq g(x)$ en $[0,3]$ y $f(x) \leq g(x)$ en $[3,5]$. Exprese el área entre los gráficos en el intervalo $[0,5]$ como una suma de integrales.
4. Suponga que el gráfico de $x = f(y)$ se encuentra a la izquierda del eje y. ¿es $\int_a^b f(y)dy$ positiva o negativa?
5. Dibuje la región cuya área está representada por

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - |x|\right) dx$$

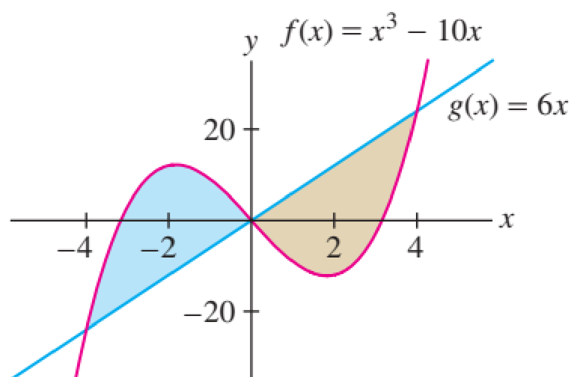
6. Calcule el área de la región entre $y = 3x^2 + 12$ y $y = 4x + 4$ sobre $[-3,3]$. Respuesta: 102



7. Calcule el área de la región entre $f(x) = 3x + 8$ y $g(x) = x^2 + 2x + 2$ sobre $[0,2]$.
8. Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 2x + 5$. Respuesta: 32/3



9. Repita el problema 8 utilizando elementos diferenciales horizontales.
10. Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x^3 - 10x$ y $g(x) = 6x$

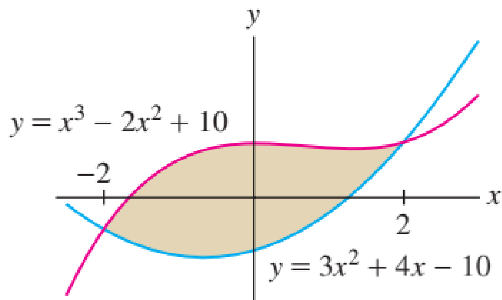


11. Dibuje la región entre $y = \sin x$ y $y = \cos x$ sobre el intervalo y calcule su área. (a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ Respuesta: $\sqrt{2} - 1$ (b) $[0, \pi]$.
12. Dibuje la región encerrada por las gráficas de $y = 20 + x - x^2$ y $y = x^2 - 5x$ en $[-1,1]$ y calcule su valor.
13. Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x(x^2 - 1)$ y $g(x) = 1 - x^2$ en $[-1,1]$. Respuesta: 4/3

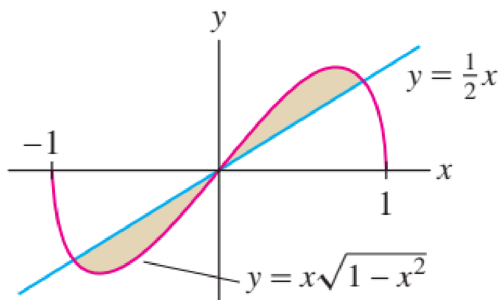
14. Dibuje la región limitada por la recta $y = 2$ y la gráfica de $y = \sec^2 x$ para $-\pi/4 < x < \pi/4$ y calcule su área. Respuesta: $\pi - 2$

[15-19] Encuentre el área de las regiones sombreadas.

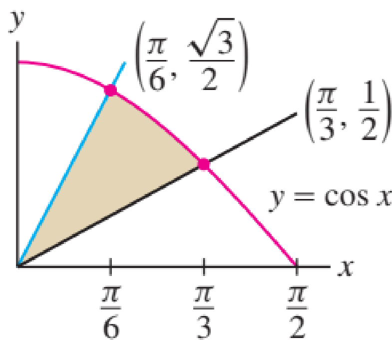
15. Respuesta: $160/3$



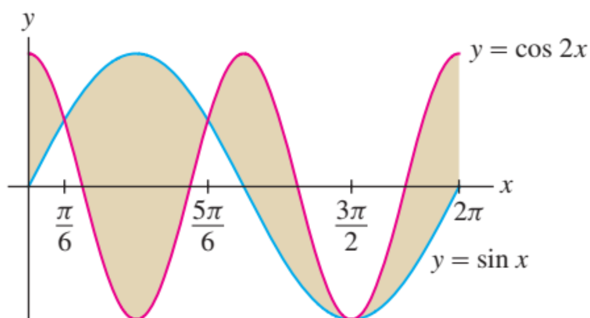
16.



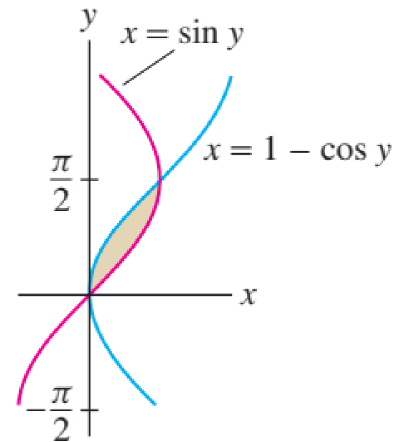
17. Respuesta: 0.3309



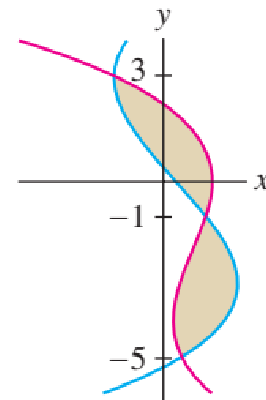
18.



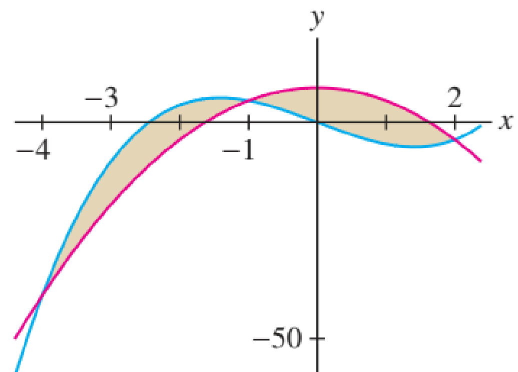
19. Respuesta: $2 - \pi/2$



20. En la siguiente figura se muestra la región encerrada por $x = y^3 - 26y + 10$ y $x = 40 - 6y^2 - y^3$. Relacione las ecuaciones con las curvas y calcule el área de la región. Respuesta: 256



21. En la siguiente figura se muestra la región encerrada por $y = x^3 - 6x$ y $y = 8 - 3x^2$. Relacione las ecuaciones con las curvas y calcule el área de la región.



22. Calcule el área de la región que se encuentra a la derecha de $x = y^2 + 4y - 22$ y a la izquierda de $x = 3y + 8$. Respuesta: $1331/6$

[23-24] Encuentre el área encerrada por las gráficas de dos maneras: *i)* integrando a lo largo del eje x. *ii)* integrando a lo largo del eje y.

23. $x = 9 - y^2, x = 5$ Respuesta: $32/3$

24. La *parábola semicúbica* $y^2 = x^3$ y la recta $x = 1$.

[25-26] Determine el área de la región utilizando integración a lo largo del eje x o del eje y, de manera que sólo sea necesario evaluar una integral.

25. Región entre $y^2 = x + 5$ y $y^2 = 3 - x$. Respuesta: $64/3$

26. Región entre $y = x$ y $x + y = 8$ sobre $[2,3]$

[27-32] En los ejercicios 27–32, dibuja la región encerrada por las curvas y calcula su área como una integral a lo largo del eje x o del eje y.

27. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 4$ Respuesta: $64/3$

28. $x + y = 4, x - y = 0, y + 3x = 4$ Respuesta: 2

29. $y = 8 - \sqrt{x}, y = \sqrt{x}, x = 0$ Respuesta: $128/3$

30. $x = |y|, x = 1 - |y|$ Respuesta: $1/2$

31. $x = 2y, x + 1 = (y - 1)^2$ Respuesta: $32/3$

32. $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}, y = 9$, primer cuadrante.

33. Explique geométricamente (sin hacer ningún cálculo):



$$\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^{1/n} dx = 1 \qquad para\ n > 0$$